第 57 卷　第 5 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 57　No. 5
2018 年　9 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Sep.　2018

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2018. 05. 020

Banach 空间中 $GC(0,e)$ 类广义发展算子的一致指数不稳定性*

岳田[1]，宋晓秋[2]
（1. 湖北汽车工业学院理学院，湖北 十堰 442002；
2. 中国矿业大学数学学院，江苏 徐州 221116）

摘　要：研究 Bananch 空间中 $GC(0,e)$ 类广义发展算子的一致指数不稳定性。基于 $GC(0,e)$ 类广义发展算子的定义，应用数学分析与算子理论得到了一致指数不稳定的若干充要条件刻画。所得结果推广和完善了指数稳定性理论中一些已有结果，这对于研究广义发展算子的不稳定性具有重要的理论价值。

关键词：一致指数不稳定性；$GC(0,e)$ 类广义发展算子；Banach 空间
中图分类号：O175. 13　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 – 6579（2018）05 – 0150 – 05

On uniform exponential instability of $GC(0,e)$ -generalized evolution operator in Banach space

YUE Tian[1]，*SONG Xiaoqiu*[2]
（1. School of Science，Hubei University of Automotive Technology，Shiyan 442002，China；
2. School of Mathematics，China University of Mining and Technology，Xuzhou 221116，China）

Abstract：The uniform exponential instability of $GC(0,e)$ -generalized evolution operator in Banach space is studied. Based on the definition of $GC(0,e)$ -generalized evolution operator，the necessary and sufficient conditions for uniform exponential instability are obtained via mathematical analysis and operator theory. The results extend some well-known results in exponential stability theory. The research is theoretically important for studying the instability of generalized evolution operator.

Key words：uniform exponential instability；$GC(0,e)$ -generalized evolution operator；Banach space

众所周知，近年来关于单参数算子半群以及发展算子的指数稳定性理论研究方面取得了突破性的进展，大量长期公开问题的解决，使得相应理论不断丰富和完善[1-7]。值得一提的是 Datko、Pazy、Rolewicz 对于指数稳定性理论研究的奠基性贡献。1970 年 Datko[1]指出强连续算子半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 一致指数稳定的充要条件为对任一 $x\in X$，有 $\int_0^\infty \|T(t)x\|^2\mathrm{d}x<\infty$，随后 Pazy[2]将其结论推广到了 $L^p(\mathbf{R}_+)(p\geqslant 1)$ 的情形。1973 年 Datko 推广了上述结论，指出具有一致指数增长的演化过程 $\{U(t,s)\}_{t\geqslant s\geqslant 0}$ 是一致指数稳定的充要条件为对任一 $x\in X$，存在 $p\geqslant 1$ 使 $\sup\limits_{s\geqslant 0}\int_s^\infty \|U(t,s)x\|^p\mathrm{d}t<\infty$ 成立，Rolewicz[3]于 1986 年对此结果做了相应的改进。

除了指数稳定性以外，近年来关于发展方程的指数不稳定性方面也获得了极大的关注[8-12]。如文献［8］利用容许性方法、文献［9 – 10］利用赋范函数空间的方法探讨了线性斜积半流的指数不稳

* **收稿日期：**2017 – 11 – 16
基金项目：湖北省教育厅科学技术研究项目（B2018067）
作者简介：岳田（1988 年生），男；**研究方向：**微分系统定性理论；E-mail：yuetian@ cumt. edu. cn

定性的存在条件。文献［11－12］分别给出了 Banach 空间中线性斜演化半流的一致指数不稳定性和非一致指数不稳定性的若干刻画。

作为传统发展算子的推广，葛照强与冯德兴在文献［13］中定义了一种新的广义发展算子，即在 Banach 空间 X 上具有性质（ii）（见定义 1），文中对其存在性、唯一性进行了相关探讨。在文献［14］中，作者讨论了广义发展算子一致指数稳定性的充要条件，所得结果在研究时变广义分布参数系统的稳定性方面将有重要的价值。值得注意的是，文献［14］中结果可以判定系统 $Ex'(t)=A(t)x(t)$ 的稳定性，这样弥补了利用单参数半群或发展算子不能判定此系统稳定性的缺陷。本文的主要目的是研究 $GC(0,e)$ 类广义发展算子的一致指数不稳定性。

1　预备知识

设 X 为一实或复 Banach 空间，$B(X)$ 表示 X 上有界线性算子全体所构成的集合，$\|\cdot\|$ 表示 X 上的范数。记 $\Delta=\{(t,t_0)\in \mathbf{R}_+^2: t\geqslant t_0\geqslant 0\}$。$F_1$ 表示所有满足如下性质的非减连续函数 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 构成的集合：

（i）$f(t)>0,\forall t>0$；

（ii）$f(ts)\leqslant f(t)f(s),\forall (t,s)\in\mathbf{R}_+^2$。

F_2 表示所有满足如下性质的非减连续函数 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 构成的集合：

（i）$f(t)>0,\forall t>0$；

（ii）$f(ts)\geqslant f(t)f(s),\forall (t,s)\in\mathbf{R}_+^2$。

定义 1[14]　设 $E\in B(X)$。$\Phi(t,s):\Delta\to B(X)$ 称为由 E 引导的 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，或简称 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，如果它满足如下四条性质：

（i）$\Phi(s,s)=\Phi_0, s\in[0,\infty)$，其中 $\Phi_0\in B(X)$；

（ii）$\Phi(t,r)E\Phi(r,s)=\Phi(t,s),\forall (t,r),(r,s)\in\Delta$；

（iii）$\Phi(\cdot,s)$ 在 $[s,\infty)$ 上强连续且 $\Phi(t,\cdot)$ 在 $[0,t]$ 上强连续；

（iv）存在 $M\geqslant 1$ 和 $\omega>0$ 使得对所有 $(t,s)\in\Delta$，有 $\|\Phi(t,s)\|\leqslant Me^{\omega(t-s)}$。

定义 2　$GC(0,e)$ 类广义发展算子 $\Phi(t,s)$ 称为一致指数不稳定的如果存在常数 $K>0$ 和 $v>0$ 使得对所有 $t\geqslant s\geqslant 0$ 和 $x\in X$，有

$$\|\Phi(t,s)x\|\geqslant Ke^{v(t-s)}\|x\| \tag{1}$$

注 1　设 $E_1=\dfrac{E}{\|E\|},\Phi_1(t,s)=\|E\|\Phi(t,s)$，则 $\Phi(t,s)$ 是由 E 引导的 $GC(0,e)$ 类广义发展算子的充要条件为 $\Phi_1(t,s)$ 是由 E_1 引导的 $GC(0,e)$ 类广义发展算子；$\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的当且仅当 $\Phi_1(t,s)$ 是一致指数不稳定的。因此，不失一般性，以下我们总假定 $\|E\|=1$。

2　主要结果

定理 1　设 $\Phi(t,s)$ 是 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在两个常数 $h>0$ 和 $q>1$ 使得对每个 $x\in X$ 和 $s\geqslant 0$ 存在 $\tau_{x,s}\in(0,h]$ 满足

$$\|\Phi(s+\tau_{x,s},s)x\|\geqslant q\|x\| \tag{2}$$

证明　必要性显然。对于充分性，设任一固定的 $x\in X$ 和 $s\geqslant 0$，由假设存在 $t_1:=\tau_{x,s}\in(0,h]$ 使得 $\|\Phi(s+t_1,s)x\|\geqslant q\|x\|$ 成立。现令 $s'=s+t_1$ 以及 $y=\Phi(s+t_1,s)x$，则存在 $t_2\in(0,h]$ 使得

$$\|\Phi(s'+t_2,s')y\|= \|\Phi(s+t_1+t_2,s)x\|\geqslant q\|y\|\geqslant q^2\|x\|$$

记 $s_0=t_0=0$。由数学归纳法可以找到一个序列 $(t_n)_{n\in\mathbf{N}},(t_n\in(0,h],n\in\mathbf{N}_+)$ 使得

$$\|\Phi(s+s_n,s)x\|\geqslant q^n\|x\| \tag{3}$$

其中 $s_n=\sum\limits_{i=0}^{n}t_i,n\in\mathbf{N}$。如果序列 $(s_n)_n$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\sigma\geqslant 0$。由式（3）可得 $\|\Phi(s+\sigma,s)\|\geqslant\infty$，从而矛盾，故 $s_n\to\infty$。

设 $t\geqslant 0$，则存在 $n\in\mathbf{N}$ 使得 $s_n\leqslant t<s_{n+1}<(n+1)h$。由于

$$q^{n+1}\|x\|\leqslant\|\Phi(s+s_{n+1},s)x\|= \|\Phi(s+s_{n+1},s+t)\Phi(s+t,s)x\|\leqslant Me^{\omega h}\|\Phi(s+t,s)x\|$$

进而

$$\|\Phi(s+t,s)x\|\geqslant\frac{1}{Me^{\omega h}}q^{n+1}\|x\|\geqslant \frac{1}{Me^{\omega h}}e^{v(n+1)h}\|x\|\geqslant\frac{1}{Me^{\omega h}}e^{vt}\|x\|$$

其中 $K=\dfrac{1}{Me^{\omega h}},v=\dfrac{1}{h}\ln q$。故 $\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的。

定理 2　设 $\Phi(t,s)$ 是 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在非增函数 $\varphi:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=0$ 使得对于任一 $x\in X$ 及 $(t,s)\in\Delta$，有

$$\varphi(t-s)\|\Phi(t,s)x\|\geqslant\|x\| \tag{4}$$

证明　必要性。令 $\varphi(t)=\frac{1}{K}\mathrm{e}^{-vt}$ 即可，其中 K 和 v 由定义2给出。

充分性。依据函数 φ 的性质可知存在常数 $\delta>0$ 使得 $\varphi(\delta)<1$，易知对任一 $(t,s)\in\Delta$ 存在 $n\in\mathbf{N}$ 和 $l\in[0,\delta)$ 使 $t-s=n\delta+l$。进而由已知条件可得

$$\begin{aligned}&\|x\|\leqslant\varphi(l)\|\Phi(t-n\delta,s)x\|\leqslant\\&\varphi(l)\varphi(\delta)\|\Phi(t-(n-1)\delta,s)x\|\leqslant\cdots\leqslant\\&\varphi(l)\varphi^{n}(\delta)\|\Phi(t,s)x\|\leqslant\\&\frac{\varphi(0)}{\varphi(\delta)}\varphi^{n+1}(\delta)\|\Phi(t,s)x\|\leqslant\\&\frac{1}{K}\mathrm{e}^{-v(t-s)}\|\Phi(t,s)x\|\end{aligned}$$

对任一 $x\in X$ 及 $(t,s)\in\Delta$ 成立，其中 $K=\frac{\varphi(\delta)}{\varphi(0)}$，$v=-\frac{\ln\varphi(\delta)}{\delta}$。因此，$\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的。

推论1　设 $\Phi(t,s)$ 是 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在非减函数 $\psi:[0,\infty)\to(0,\infty)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\infty$ 使得对于任一 $x\in X$ 及 $(t,s)\in\Delta$，有

$$\psi(t-s)\|x\|\leqslant\|\Phi(t,s)x\| \tag{5}$$

定理3　设 $\Phi(t,s)$ 是单射 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在函数 $f\in F_1$ 及常数 $C>0$ 使得对于任一 $x\in X\setminus\{0\}$ 及 $s\geqslant0$，有

$$\int_s^{\infty}f\Big(\frac{1}{\|\Phi(t,s)x\|}\Big)\mathrm{d}t\leqslant Cf\Big(\frac{1}{\|x\|}\Big) \tag{6}$$

证明　必要性。如果 $\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的，则由定义存在 $K>0,v>0$ 使得对于任一 $x\in X\setminus\{0\}$ 及 $s\geqslant0$，有

$$\int_s^{\infty}f\Big(\frac{1}{\|\Phi(t,s)x\|}\Big)\mathrm{d}t\leqslant\int_s^{\infty}\frac{1}{K\mathrm{e}^{v(t-s)}\|x\|}\mathrm{d}t=\frac{1}{Kv\|x\|}$$

因此，对 $f(t)=t,C=\frac{1}{Kv}$，式（6）成立。

充分性。利用反证法。如果 $\Phi(t,s)$ 不是一致指数不稳定的，根据定理1可得，对所有 $h>0$ 及 $q>1$ 存在 $s_0\geqslant0$ 和 $x_0\in X$ 使得对所有 $\tau\in(0,h]$，有

$$\|\Phi(s_0+\tau,s_0)x_0\|<q\|x_0\| \tag{7}$$

特别地，对 $h=Cf(2)$ 及 $q=2$ 成立。由式（7）有

$$\begin{aligned}&f(2)\int_{s_0}^{\infty}f\Big(\frac{1}{\|\Phi(t,s_0)x_0\|}\Big)\mathrm{d}t=\\&f(2)\int_0^{\infty}f\Big(\frac{1}{\|\Phi(s_0+\tau,s_0)x_0\|}\Big)\mathrm{d}\tau\geqslant\\&\int_0^{\infty}f\Big(\frac{2}{\|\Phi(s_0+\tau,s_0)x_0\|}\Big)\mathrm{d}\tau>\\&\int_0^{h}f\Big(\frac{1}{\|x_0\|}\Big)\mathrm{d}\tau=Cf(2)f\Big(\frac{1}{\|x_0\|}\Big)\end{aligned}$$

这与式（6）矛盾。因此，$\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的。

定理4　设 $\Phi(t,s)$ 是单射 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在函数 $f\in F_2$ 及常数 $C>0$ 使得对于任一 $x\in X\setminus\{0\}$ 及 $s\geqslant0$，式（6）成立。

证明　必要性。令 $f(t)=t$ 即可。

充分性。与定理3证明类似。事实上，由式（7），对 $q\in(1,+\infty)$ 和 $h=\frac{C}{f(\frac{1}{q})}$ 有

$$\begin{aligned}&\int_{s_0}^{\infty}f\Big(\frac{1}{\|\Phi(t,s_0)x_0\|}\Big)\mathrm{d}t=\\&\int_0^{\infty}f\Big(\frac{1}{\|\Phi(s_0+\tau,s_0)x_0\|}\Big)\mathrm{d}\tau>\\&\int_0^{h}f\Big(\frac{1}{q\|x_0\|}\Big)\mathrm{d}\tau\geqslant hf\Big(\frac{1}{q}\Big)f\Big(\frac{1}{\|x_0\|}\Big)=Cf\Big(\frac{1}{\|x_0\|}\Big)\end{aligned}$$

这与式（6）矛盾。因此，$\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的。

注2　定理3与定理4针对 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，将指数稳定性理论中若干经典结论[3-4,14]推广到了一致指数不稳定性情形。

推论2　设 $\Phi(t,s)$ 是单射 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在常数 $p>0$ 及 $C>0$ 使得对于任一 $x\in X\setminus\{0\}$ 及 $s\geqslant0$，有

$$\int_s^{\infty}\frac{1}{\|\Phi(t,s)x\|^{p}}\mathrm{d}t\leqslant\frac{C}{\|x\|^{p}} \tag{8}$$

证明　在定理3中令 $f(t)=t^{p}$ 即可。

注3　推论2针对 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，将指数稳定性理论中Datko[1]型结论推广到了一致指数不稳定性情形。

下面推论将给出定理3与定理4的离散情形。

推论3　设 $\Phi(t,s)$ 是单射 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在函数 $f\in F_1\cup F_2$ 及常数 $C'>0$ 使得对于任一 $x\in X\setminus\{0\}$ 及 $s\geqslant0$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}f\Big(\frac{1}{\|\Phi(s+n,s)x\|}\Big)\leqslant C'f\Big(\frac{1}{\|x\|}\Big) \tag{9}$$

证明　令 $f(t)=t$ 可得必要性。

充分性。设 $T_n = \min\limits_{\tau \in [n,n+1]} \|\Phi(s+\tau,s+n)x\| (n \in \mathbf{N})$，$T = \inf\limits_{n \in \mathbf{N}} T_n$。若 $f \in F_1$，由式（9），对于任一 $x \in X \setminus \{0\}$ 及 $s \geqslant 0$，有

$$\int_s^{\infty} f\left(\frac{1}{\|\Phi(t,s)x\|}\right) dt =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f\left(\frac{1}{\|\Phi(s+\tau,s+n)\Phi(s+n,s)x\|}\right) d\tau \leqslant$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f\left(\frac{1}{T\|\Phi(s+n,s)x\|}\right) d\tau \leqslant$$
$$f\left(\frac{1}{T}\right) \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{1}{\|\Phi(s+n,s)x\|}\right) \leqslant C' f\left(\frac{1}{T}\right) f\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$$

如果 $f \in F_2$，对于任一 $x \in X \setminus \{0\}$ 及 $s \geqslant 0$，有

$$f(T) \int_s^{\infty} f\left(\frac{1}{\|\Phi(t,s)x\|}\right) dt \leqslant$$
$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{T}{\|\Phi(s+\tau,s)x\|}\right) d\tau =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f\left(\frac{T}{\|\Phi(s+\tau,s+n)\Phi(s+n,s)x\|}\right) d\tau \leqslant$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f\left(\frac{1}{\|\Phi(s+n,s)x\|}\right) d\tau \leqslant C' f\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$$

利用定理 3 和定理 4 可知 $\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的。

推论 4　设 $\Phi(t,s)$ 是单射 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在常数 $C' > 0$ 使得对于任一 $x \in X \setminus \{0\}$ 及 $s \geqslant 0$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|\Phi(s+n,s)x\|} \leqslant \frac{C'}{\|x\|} \tag{10}$$

证明　在推论 3 中令 $f(t) = t$ 即可。

定理 5　设 $\Phi(t,s)$ 是单射 $GC(0,e)$ 类广义发展算子，则 $\Phi(t,s)$ 一致指数不稳定的充要条件是存在常数 $C > 0$ 和 $\alpha > 0$ 使得对于任一 $x \in X \setminus \{0\}$ 及 $(t,s) \in \Delta$，有

$$\frac{1}{t-s} \int_s^t \frac{e^{\alpha(\tau - s)}}{\|\Phi(\tau,s)x\|} d\tau \leqslant \frac{C}{\|x\|} \tag{11}$$

证明　必要性。如果 $\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的，则由定义 2 存在 $K > 0, v > 0$ 使得对于任一 $x \in X \setminus \{0\}$ 及 $(t,s) \in \Delta$，有

$$\frac{1}{t-s} \int_s^t \frac{e^{\alpha(\tau - s)}}{\|\Phi(\tau,s)x\|} d\tau \leqslant$$
$$\frac{1}{K(t-s)\|x\|} \int_s^t e^{(\alpha - v)(\tau - s)} d\tau =$$
$$\frac{1}{K(t-s)\|x\|} \int_s^t e^{-\alpha(\tau - s)} d\tau = \frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{K\alpha(t-s)\|x\|} \leqslant \frac{C}{\|x\|}$$

其中 $\alpha = \dfrac{v}{2}, C = \dfrac{1}{K} \sup\limits_{\mu > 0} \dfrac{1 - e^{-\mu}}{\mu} < \infty$。

充分性。如果 $\Phi(t,s)$ 不是一致指数不稳定的，设 $h > 0$ 满足 $e^{\alpha h} > 1 + 2\alpha h C$，其中 C 和 α 由式（11）给出，由定理 1，对 $q = 2$ 存在 $s_0 \geqslant 0$ 及 $x_0 \in X \setminus \{0\}$ 使得对所有的 $\tau \in (0,h]$，式（7）成立。从而对 $t = s_0 + h$，有

$$\frac{1}{t - s_0} \int_{s_0}^t \frac{e^{\alpha(\tau - s_0)}}{\|\Phi(\tau,s_0)x_0\|} d\tau =$$
$$\frac{1}{h} \int_{s_0}^{s_0+h} \frac{e^{\alpha(\tau - s_0)}}{\|\Phi(\tau,s_0)x_0\|} d\tau >$$
$$\frac{1}{h} \int_{s_0}^{s_0+h} \frac{e^{\alpha(\tau - s_0)}}{2\|x_0\|} d\tau = \frac{e^{\alpha h} - 1}{2h\alpha} \frac{1}{\|x_0\|} > \frac{C}{\|x_0\|}$$

这与式（11）矛盾。因此，$\Phi(t,s)$ 是一致指数不稳定的。

参考文献：

[1] DATKO R. Uniform asymptotic stability of evolutionary processes in a Banach space [J]. SIAM J Math Anal, 1973, 3(3): 428–445.

[2] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M]. New York: Springer, 1983.

[3] ROLEWICZ S. On uniform N-equistability [J]. J Math Anal Appl, 1986, 115(2): 434–441.

[4] LUPA N, MEGAN M, POPA I L. On weak exponential stability of evolution operators in Banach spaces [J]. Nolinear Anal, 2010, 73(8): 2445–2450.

[5] PREDA C, PREDA P, BATARAN F. An extension of a theorem of R. Datko to the case of (non) uniform exponential stability of linear skew-product semiflows [J]. J Math Anal Appl, 2015, 425(2): 1148–1154.

[6] 成立花. Banach 空间混合型泛函方程的稳定性问题[J]. 中山大学学报(自然科学学版), 2017, 56(6): 72–75.
CHENG L H. Stability of a mixed type functional equation in Banach spaces [J]. Acta Scientiarum Nathralium Universitatis Sunyatseni, 2017, 56(6): 72–75.

[7] 柏萌, 冯兆永, 周庆华. 一个非线性带分布时滞尺度结构的种群模型正稳态解的存在性[J]. 中山大学学报(自然科学学版), 2018, 57(1): 44–48.
BAI M, FENG Z Y, ZHOU Q H. Steady states of a nonlinear size-structured population model with distributed

delay in birth process [J]. Acta Scientiarum Nathralium Universitatis Sunyatseni, 2018, 57(1): 44 – 48.

[8] MEGAN M, SASU A L, SASU B. Perron conditions for uniform exponential expansiveness of linear skew-product flows [J]. Monatsh Math, 2003, 138(2): 145 – 157.

[9] MEGAN M, SASU A L, SASU B. Exponential instability of linear skew-product semiflows in terms of Banach function spaces [J]. Results Math, 2004, 45(3): 309 – 318.

[10] MEGAN M, BULIGA L. Functionals on normed function spaces and exponential instability of linear skew-product semiflows [J]. Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 2007, 14(2): 355 – 362.

[11] 岳田，雷国梁，宋晓秋. 线性斜演化半流一致指数膨胀性的若干刻画[J]. 数学进展, 2016, 45(3): 433 – 442.
YUE T, LEI G L, SONG X Q. Some characterizations for the uniform exponential expansiveness of linear skew-evolution semiflows [J]. Adv Math China, 2016, 45(3): 433 – 442.

[12] 岳田，宋晓秋. 巴拿赫空间上斜演化半流的非一致指数不稳定性的存在条件[J]. 浙江大学学报(理学版), 2016, 43(2): 181 – 183.
YUE T, SONG X Q. Criteria for the existence of nonuniform exponential instability of skew-evolution semiflows in Banach spaces [J]. J Zhejiang Univ (Sci Ed), 2016, 43(2): 181 – 183.

[13] 葛照强，冯德兴. Banach 空间中时变广义分布参数系统的可解性[J]. 中国科学:信息科学, 2013, 43(3): 386 – 406.
GE Z Q, FENG D X. Solvability of a time-varying singular distributed parameter system in Banach space [J]. Sci Sin Inform, 2013, 43(3): 386 – 406.

[14] 葛照强，冯德兴. Banach 空间中广义发展算子的一致指数稳定性[J]. 应用数学学报, 2016, 39(6): 811 – 822.
GE Z Q, FENG D X. Uniformly exponential stability of generalized evolution operator in Banach space [J]. Acta Math Appl Sin, 2016, 39(6): 811 – 822.

· 简讯 ·

关于《中山大学学报（自然科学版）》网站免费下载论文全文的通知

为了进一步提升《中山大学学报（自然科学版）》的学术影响力及社会效益，更好地为广大读者、作者、审稿专家服务，《中山大学学报（自然科学版）》在其网站上将已发表论文的全文 PDF 上网，并提供免费下载。目前，过刊的全文 PDF 上网已追溯到 2008 年。追溯工作仍在进行中，陆续会有更多过刊论文的全文 PDF 上线。

浏览和下载途径简单方便。首先登录《中山大学学报》主页 http://xuebao. sysu. edu. cn/，进入自然科学版后，在“在线期刊”栏目的“当期目录”和“过刊浏览”中就可以浏览与下载当期或过期论文的摘要和全文 PDF；在“文章检索”中则可以进行检索。检索方式多样，主要有：年卷期、起始页码；中图分类号；中文或者英文的作者姓名、作者单位名称、中国题目以及关键词等等。

我们真诚希望《中山大学学报（自然科学版）》能成为广大读者与作者忠实的朋友，同时感谢各界对《中山大学学报（自然科学版）》的大力支持！热忱欢迎投稿及提出意见、建议！

《中山大学学报（自然科学版）》编辑部